

Exercices : Introduction à l'économétrie

Estimation par les Moindres Carrés Ordinaires

Note importante :

Les résultats des calculs peuvent être légèrement différents à cause des arrondis. Pour réduire ces différences, arrondir les résultats à deux décimales après chaque opération effectuée. Pour cela, si la troisième décimale est supérieure ou égale à 5, on arrondit le résultat à la valeur à 2 décimales la plus proche par excès (7,326 devient 7,33), et si la troisième décimale est strictement inférieure à 5, on arrondit le résultat à la valeur à 2 décimales la plus proche par défaut (4,872 devient 4,87). Dans tous les cas, une marge d'erreurs est acceptée.

Exercice 1

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	7.19	4.51	7.87	6.58	1.75	8.80	7.09	7.29	2.02	4.60
y_i	6.18	6.04	6.88	4.98	4.04	5.88	6.95	6.11	3.61	4.27

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 1

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).
4. **Moyennes :**

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.77} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.49}$$

5. **Variances :**

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.35}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.28}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.12}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.35	2.12
Y	2.12	1.28

La variance de X (5.35) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.28) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.12) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.12}{5.35} = \boxed{0.40}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.49 - 0.40 \times 5.77 = \boxed{3.18}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.40$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.40 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

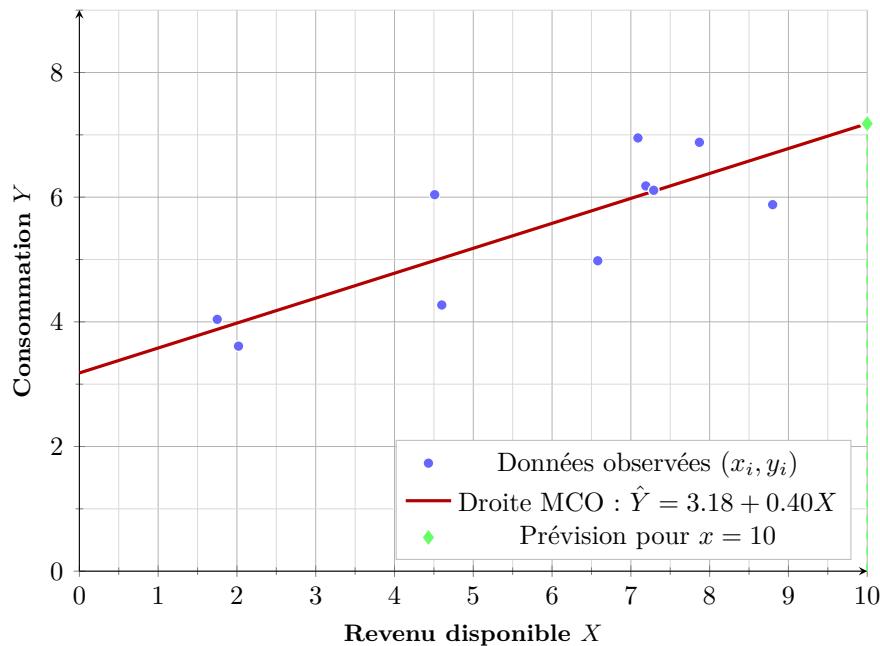
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 3.18 + 0.40 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 3.18 + 0.40 \times 10 = 3.18 + 4.00 = \boxed{7.18}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 3.18 + 0.40X$.



Lecture du graphique :

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.18$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	3.18
Coefficient β	0.40
Équation estimée	$\hat{Y} = 3.18 + 0.40X$
Prévision pour $x = 10$	7.18

Exercice 2

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.25	8.16	5.92	2.89	7.44	4.10	6.78	1.53	8.91	5.34
y_i	4.52	6.89	5.73	3.99	6.22	4.89	6.01	3.12	7.44	5.46

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 2

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.43} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.43}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.39}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.58}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.89}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.39	2.89
Y	2.89	1.58

La variance de X (5.39) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.58) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.89) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.89}{5.39} = \boxed{0.54}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.43 - 0.54 \times 5.43 = \boxed{2.50}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.54$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.54 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

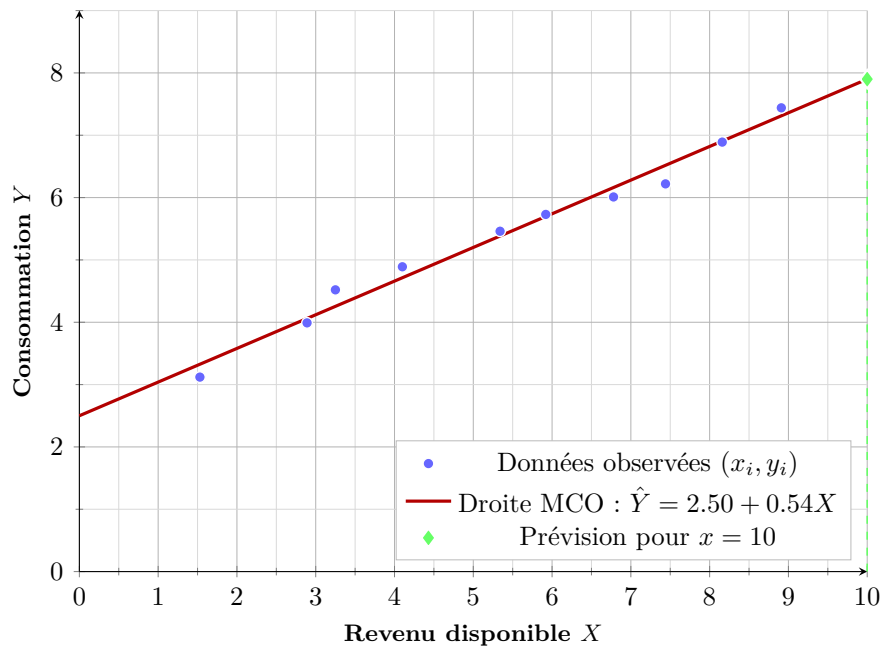
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.50 + 0.54 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.50 + 0.54 \times 10 = 2.50 + 5.40 = \boxed{7.90}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.50 + 0.54 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.90$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.50
Coefficient β	0.54
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.50 + 0.54 X$
Prévision pour $x = 10$	7.90

Exercice 3

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.34	7.89	4.57	8.23	1.46	6.79	3.91	5.68	7.12	4.89
y_i	3.14	6.84	3.64	7.68	2.45	5.82	4.98	4.77	6.55	4.14

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 3

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.29} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.00}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.71}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.62}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.32}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.71	3.32
Y	3.32	2.62

La variance de X (4.71) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.62) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.32) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.32}{4.71} = \boxed{0.70}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.00 - 0.70 \times 5.29 = \boxed{1.30}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.70$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.70 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

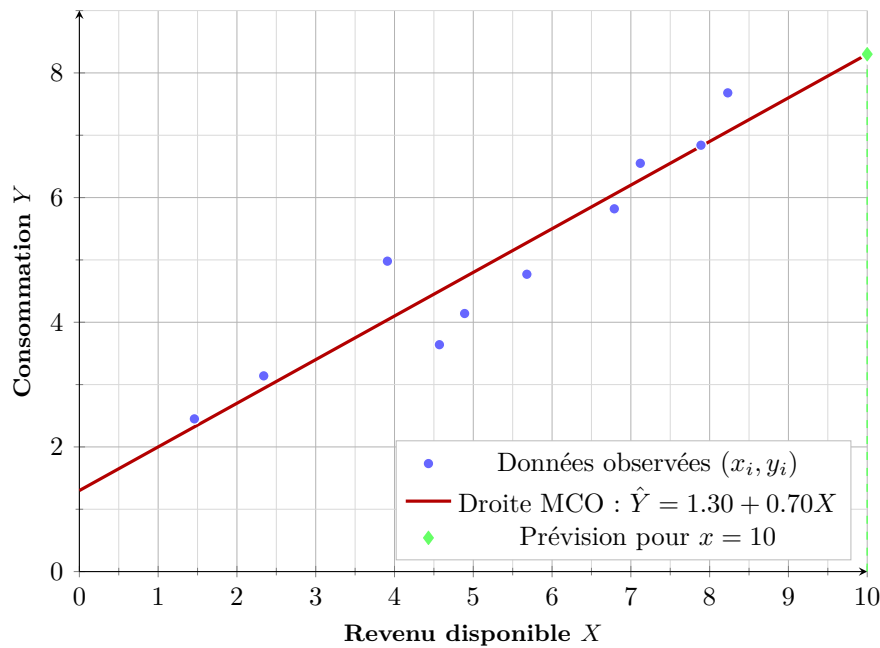
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.30 + 0.70 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.30 + 0.70 \times 10 = 1.30 + 7.00 = \boxed{8.30}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.30 + 0.70 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 8.30$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.30
Coefficient β	0.70
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.30 + 0.70 X$
Prévision pour $x = 10$	8.30

Exercice 4

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5.82	2.14	8.46	3.79	6.91	1.23	7.57	4.32	8.90	3.46
y_i	5.01	3.46	7.23	4.12	5.79	2.89	6.46	4.57	7.01	4.23

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 4

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.26} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.08}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{6.41}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.01}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.55}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	6.41	3.55
Y	3.55	2.01

La variance de X (6.41) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.01) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.55) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.55}{6.41} = \boxed{0.55}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.08 - 0.55 \times 5.26 = \boxed{2.19}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.55$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.55 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

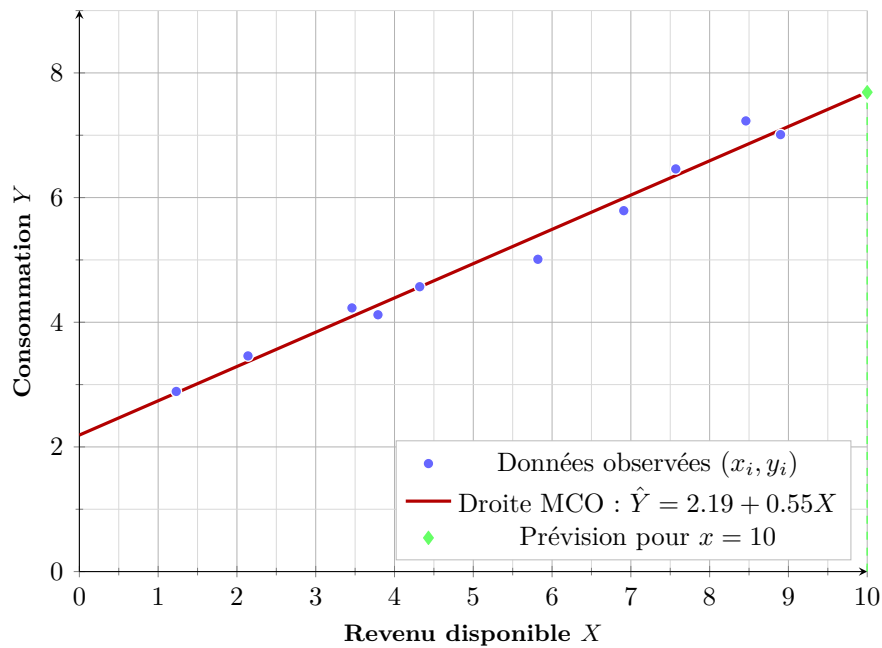
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.19 + 0.55 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.19 + 0.55 \times 10 = 2.19 + 5.50 = \boxed{7.69}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.19 + 0.55 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.69$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.19
Coefficient β	0.55
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.19 + 0.55 X$
Prévision pour $x = 10$	7.69

Exercice 5

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.82	6.44	3.29	7.91	2.16	8.53	4.68	5.23	7.09	3.90
y_i	3.74	5.32	3.84	6.85	2.92	6.29	4.54	5.61	6.39	4.11

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 5

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.11} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.96}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.97}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.57}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.65}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.97	2.65
Y	2.65	1.57

La variance de X (4.97) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.57) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.65) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.65}{4.97} = \boxed{0.53}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.96 - 0.53 \times 5.11 = \boxed{2.25}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.53$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.53 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

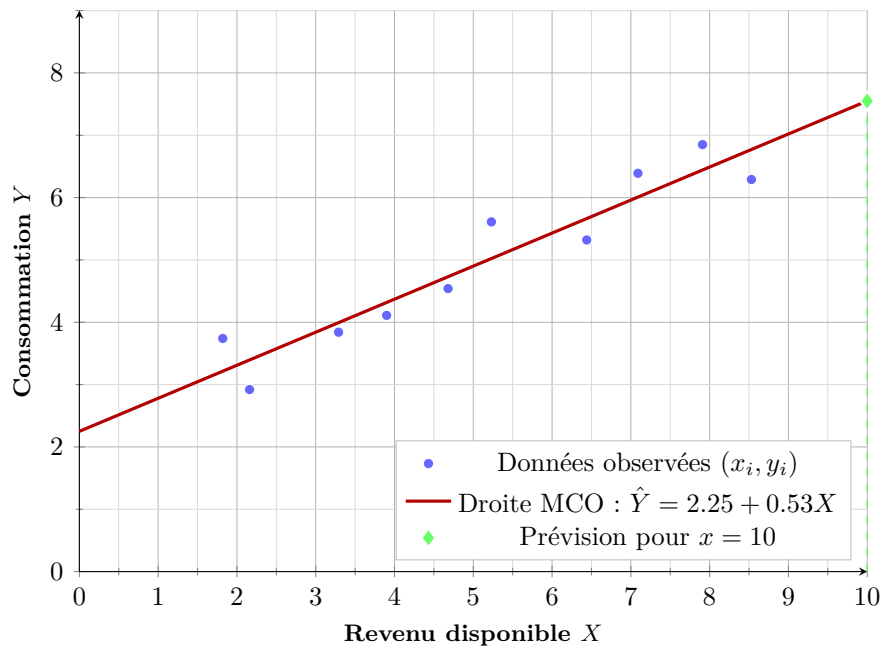
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.25 + 0.53 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.25 + 0.53 \times 10 = 2.25 + 5.30 = \boxed{7.55}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.25 + 0.53 X$.



Lecture du graphique :

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.55$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.25
Coefficient β	0.53
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.25 + 0.53 X$
Prévision pour $x = 10$	7.55

Exercice 6

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4.12	7.86	2.35	6.79	1.57	8.23	3.46	5.68	7.01	4.89
y_i	4.46	6.23	3.57	5.79	3.01	6.44	4.12	5.23	5.89	4.68

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 6

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.20} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.94}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.79}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.22}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.41}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.79	2.41
Y	2.41	1.22

La variance de X (4.79) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.22) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.41) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.41}{4.79} = \boxed{0.50}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.94 - 0.50 \times 5.20 = \boxed{2.34}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.50$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.50 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

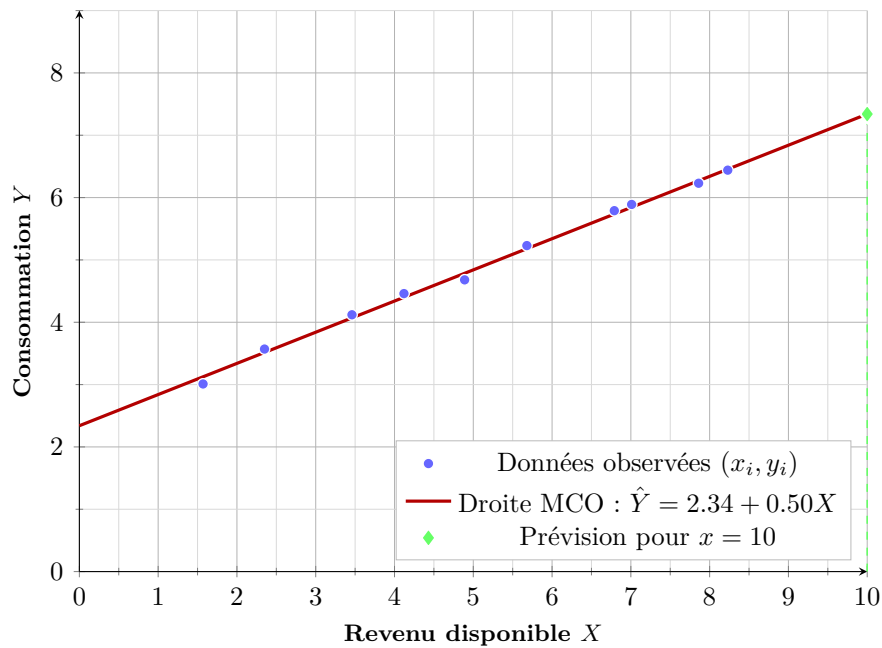
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.34 + 0.50 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.34 + 0.50 \times 10 = 2.34 + 5.00 = \boxed{7.34}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.34 + 0.50 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.34$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.34
Coefficient β	0.50
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.34 + 0.50 X$
Prévision pour $x = 10$	7.34

Exercice 7

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.68	8.12	4.46	7.23	1.89	6.57	3.79	5.91	8.44	4.01
y_i	3.89	6.57	4.23	5.91	3.46	5.68	4.57	5.23	6.79	4.44

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 7

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.31} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.08}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.67}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.16}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.30}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.67	2.30
Y	2.30	1.16

La variance de X (4.67) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.16) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.30) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.30}{4.67} = \boxed{0.49}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.08 - 0.49 \times 5.31 = \boxed{2.48}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.49$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.49 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

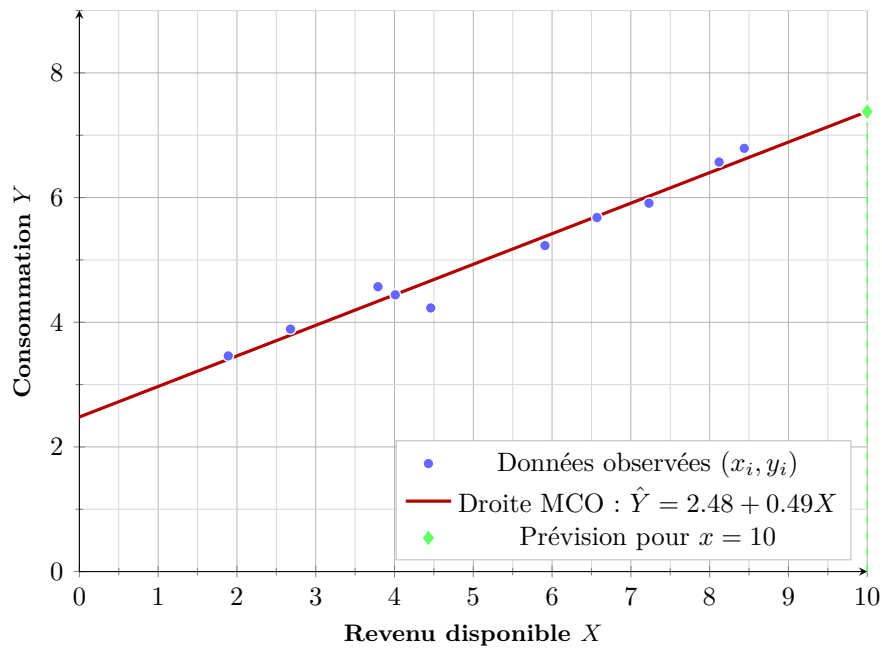
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.48 + 0.49 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.48 + 0.49 \times 10 = 2.48 + 4.90 = \boxed{7.38}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.48 + 0.49 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.38$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.48
Coefficient β	0.49
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.48 + 0.49 X$
Prévision pour $x = 10$	7.38

Exercice 8

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.46	7.23	2.19	8.57	4.91	1.68	6.34	5.12	7.89	3.79
y_i	3.69	5.91	3.57	6.79	4.23	3.12	5.46	4.57	6.23	4.46

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 8

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.12} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.80}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.05}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.37}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.58}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.05	2.58
Y	2.58	1.37

La variance de X (5.05) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.37) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.58) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.58}{5.05} = \boxed{0.51}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.80 - 0.51 \times 5.12 = \boxed{2.19}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.51$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.51 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

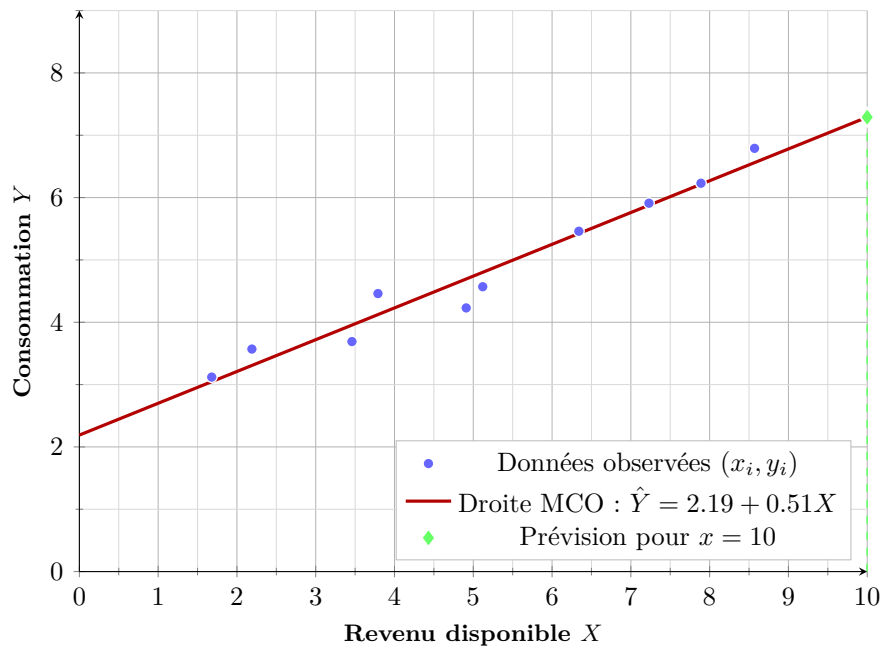
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.19 + 0.51 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.19 + 0.51 \times 10 = 2.19 + 5.10 = \boxed{7.29}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.19 + 0.51 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.29$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.19
Coefficient β	0.51
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.19 + 0.51 X$
Prévision pour $x = 10$	7.29

Exercice 9

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.13	7.82	4.57	8.91	1.46	6.23	3.79	5.68	7.44	4.01
y_i	2.78	6.40	4.00	6.70	2.87	4.57	4.14	4.61	6.12	3.45

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 9

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.20} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.56}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.42}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.81}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.03}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.42	3.03
Y	3.03	1.81

La variance de X (5.42) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.81) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.03) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.03}{5.42} = \boxed{0.56}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.56 - 0.56 \times 5.20 = \boxed{1.65}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.56$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.56 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

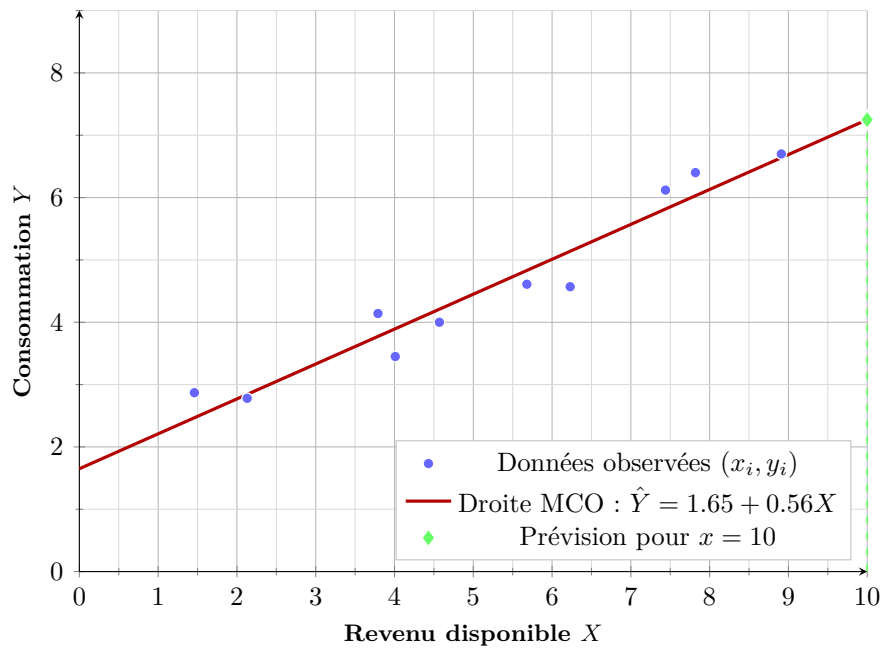
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.65 + 0.56 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.65 + 0.56 \times 10 = 1.65 + 5.60 = \boxed{7.25}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.65 + 0.56 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.25$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.65
Coefficient β	0.56
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.65 + 0.56 X$
Prévision pour $x = 10$	7.25

Exercice 10

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.57	8.23	3.89	7.46	2.12	6.79	4.23	8.57	3.46	5.68
y_i	3.24	6.51	4.39	6.12	3.68	5.89	4.76	6.79	4.01	5.23

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 10

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.20} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.06}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.68}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.38}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.79}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.68	2.79
Y	2.79	1.38

La variance de X (5.68) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.38) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.79) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.79}{5.68} = \boxed{0.49}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.06 - 0.49 \times 5.20 = \boxed{2.51}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.49$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.49 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

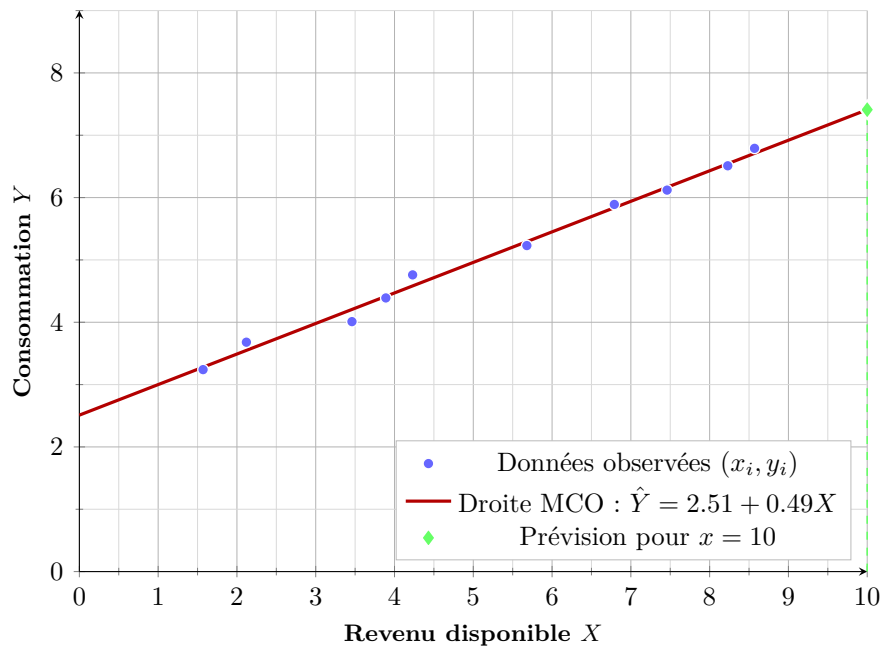
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.51 + 0.49 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.51 + 0.49 \times 10 = 2.51 + 4.90 = \boxed{7.41}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.51 + 0.49 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.41$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.51
Coefficient β	0.49
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.51 + 0.49 X$
Prévision pour $x = 10$	7.41

Exercice 11

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.46	7.12	3.79	8.23	1.57	6.89	4.12	7.57	2.89	5.23
y_i	3.08	6.60	3.57	6.58	2.02	6.08	4.14	6.34	2.80	4.92

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 11

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{4.99} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.61}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.01}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.67}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.61}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.01	3.61
Y	3.61	2.67

La variance de X (5.01) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.67) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.61) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.61}{5.01} = \boxed{0.72}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.61 - 0.72 \times 4.99 = \boxed{1.02}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.72$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.72 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

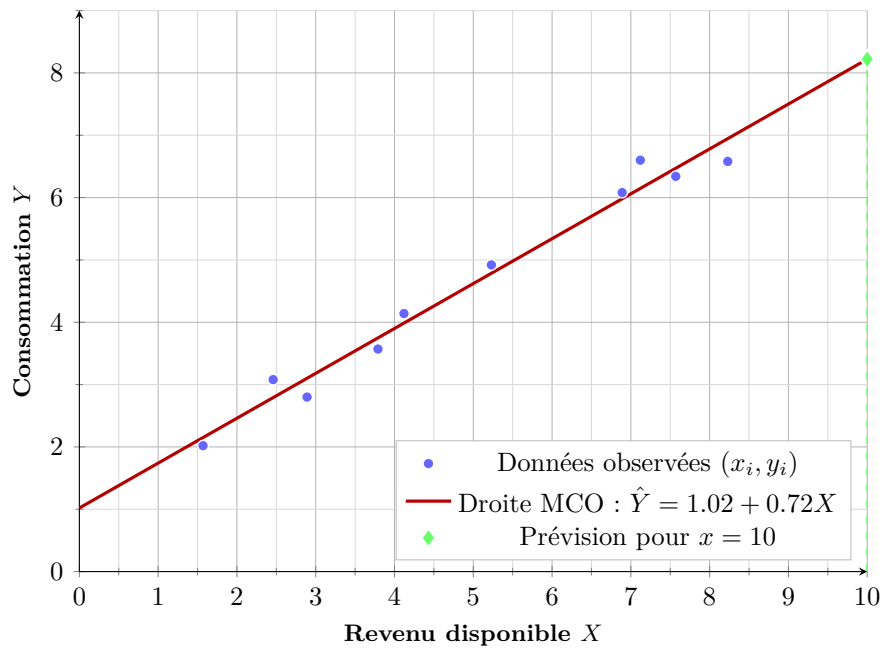
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.02 + 0.72 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.02 + 0.72 \times 10 = 1.02 + 7.20 = \boxed{8.22}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.02 + 0.72 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 8.22$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.02
Coefficient β	0.72
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.02 + 0.72 X$
Prévision pour $x = 10$	8.22

Exercice 12

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.12	7.46	2.79	8.23	1.57	6.89	4.34	7.12	2.46	5.68
y_i	3.89	6.23	3.46	6.79	2.57	5.68	4.23	5.89	3.12	4.79

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 12

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{4.97} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.67}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.21}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.85}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.08}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.21	3.08
Y	3.08	1.85

La variance de X (5.21) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.85) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.08) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.08}{5.21} = \boxed{0.59}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.67 - 0.59 \times 4.97 = \boxed{1.74}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.59$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.59 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

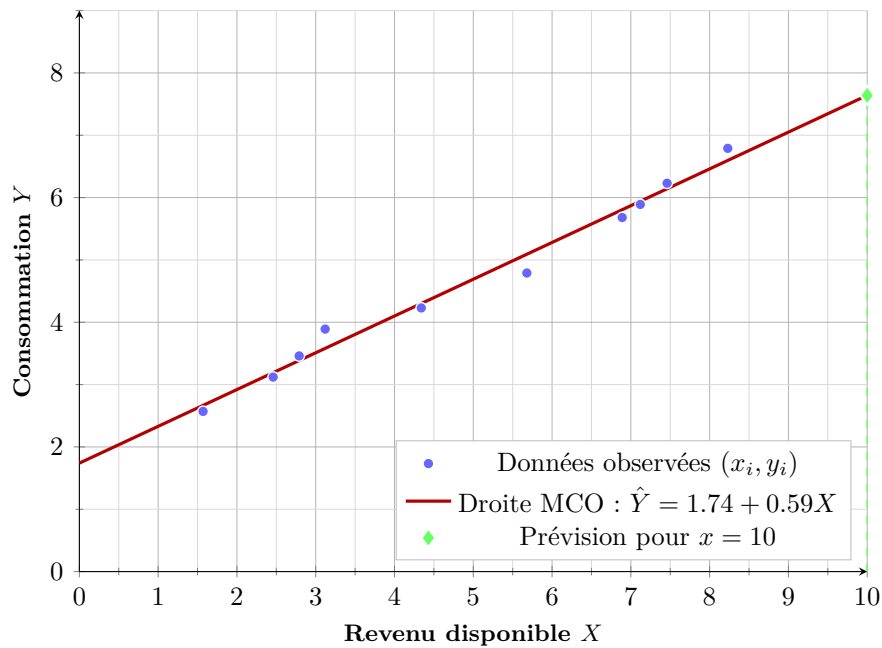
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.74 + 0.59 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.74 + 0.59 \times 10 = 1.74 + 5.90 = \boxed{7.64}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.74 + 0.59 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.64$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.74
Coefficient β	0.59
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.74 + 0.59 X$
Prévision pour $x = 10$	7.64

Exercice 13

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.82	3.53	7.38	6.41	4.13	3.66	5.79	2.49	6.38	8.53
y_i	3.91	5.89	6.25	6.22	6.04	3.79	6.58	5.92	7.59	6.94

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 13

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.11} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.91}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{3.83}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.31}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{1.48}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	3.83	1.48
Y	1.48	1.31

La variance de X (3.83) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.31) la dispersion de la consommation. La covariance positive (1.48) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{1.48}{3.83} = \boxed{0.39}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.91 - 0.39 \times 5.11 = \boxed{3.92}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.39$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.39 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

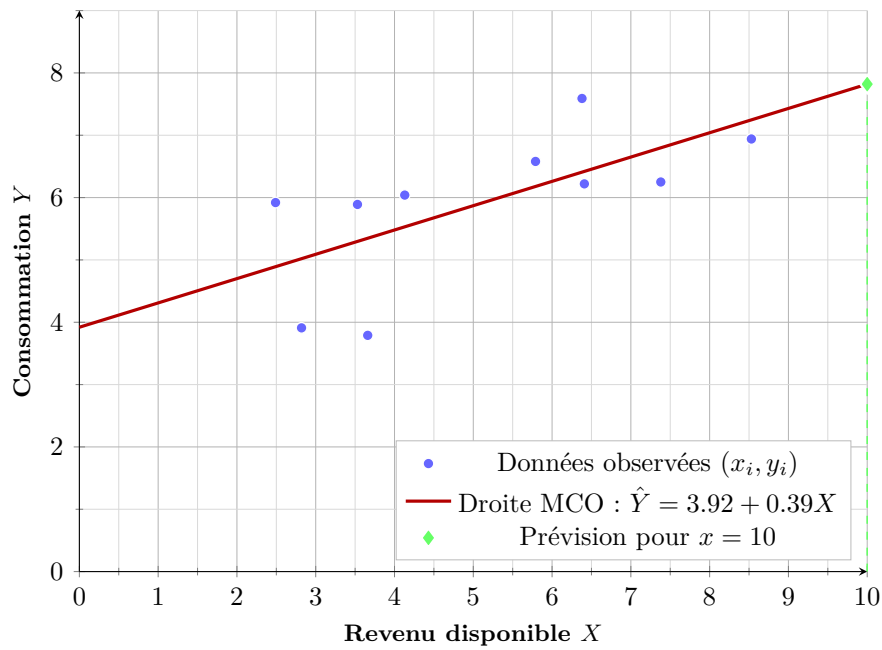
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 3.92 + 0.39 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 3.92 + 0.39 \times 10 = 3.92 + 3.90 = \boxed{7.82}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 3.92 + 0.39 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.82$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	3.92
Coefficient β	0.39
Équation estimée	$\hat{Y} = 3.92 + 0.39 X$
Prévision pour $x = 10$	7.82

Exercice 14

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.35	7.89	4.12	6.57	1.79	8.23	3.46	5.68	7.01	4.89
y_i	3.61	6.66	4.48	5.95	3.04	6.58	3.97	5.44	5.54	5.34

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 14

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.20} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.06}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.58}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.38}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.46}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.58	2.46
Y	2.46	1.38

La variance de X (4.58) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.38) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.46) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.46}{4.58} = \boxed{0.54}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la pension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.06 - 0.54 \times 5.20 = \boxed{2.25}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.54$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.54 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

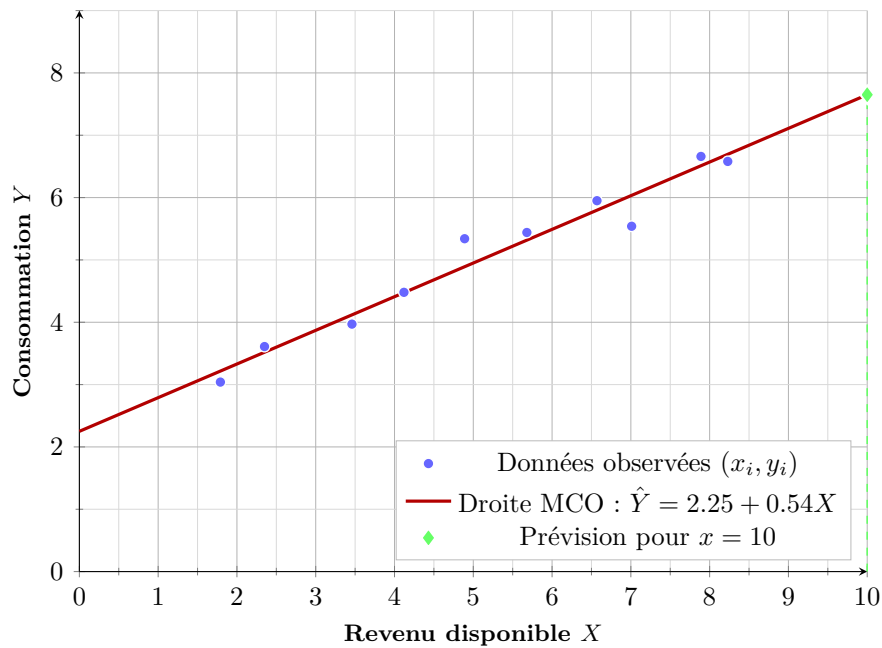
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.25 + 0.54 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.25 + 0.54 \times 10 = 2.25 + 5.40 = \boxed{7.65}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.25 + 0.54 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.65$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.25
Coefficient β	0.54
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.25 + 0.54 X$
Prévision pour $x = 10$	7.65

Exercice 15

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.23	7.46	2.19	8.12	1.57	6.79	4.23	5.68	7.89	3.46
y_i	3.66	6.36	3.28	6.96	2.60	5.86	4.00	5.26	6.65	3.56

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 15

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.06} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.82}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.35}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.25}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.45}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.35	3.45
Y	3.45	2.25

La variance de X (5.35) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.25) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.45) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.45}{5.35} = \boxed{0.64}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.82 - 0.64 \times 5.06 = \boxed{1.58}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.64$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.64 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

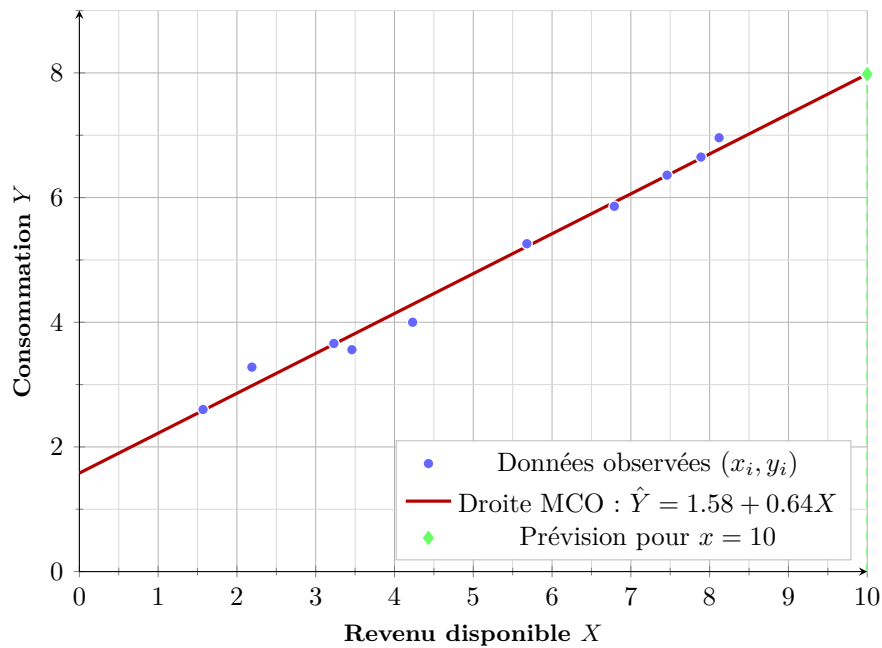
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.58 + 0.64 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.58 + 0.64 \times 10 = 1.58 + 6.40 = \boxed{7.98}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.58 + 0.64 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.98$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.58
Coefficient β	0.64
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.58 + 0.64 X$
Prévision pour $x = 10$	7.98

Exercice 16

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.57	7.23	3.89	8.46	1.68	6.12	4.57	7.89	2.35	5.79
y_i	3.18	6.34	4.52	6.81	2.46	5.79	4.23	6.57	3.01	5.45

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 16

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.06} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.84}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.25}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.26}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.41}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.25	3.41
Y	3.41	2.26

La variance de X (5.25) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.26) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.41) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.41}{5.25} = \boxed{0.65}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.84 - 0.65 \times 5.06 = \boxed{1.55}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.65$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.65 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

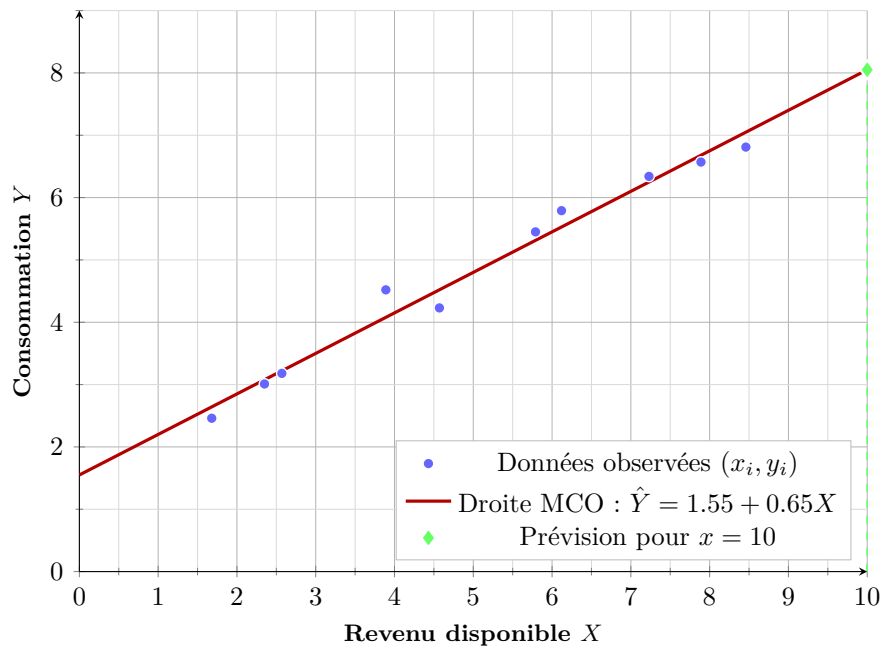
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.55 + 0.65 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.55 + 0.65 \times 10 = 1.55 + 6.50 = \boxed{8.05}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.55 + 0.65 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 8.05$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.55
Coefficient β	0.65
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.55 + 0.65 X$
Prévision pour $x = 10$	8.05

Exercice 17

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.10	7.60	3.90	8.20	1.50	6.80	4.20	7.00	2.70	5.30
y_i	3.88	5.39	5.34	6.14	3.93	4.86	4.86	5.54	4.73	4.49

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 17

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{4.93} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.92}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.21}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{0.46}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{1.26}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.21	1.26
Y	1.26	0.46

La variance de X (5.21) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (0.46) la dispersion de la consommation. La covariance positive (1.26) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{1.26}{5.21} = \boxed{0.24}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.92 - 0.24 \times 4.93 = \boxed{3.74}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.24$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.24 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

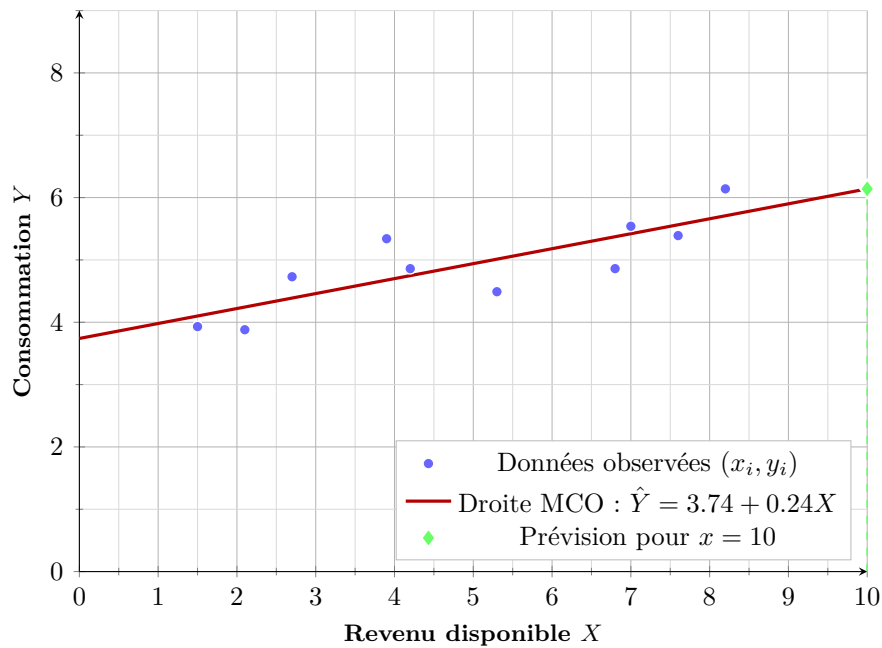
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 3.74 + 0.24 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 3.74 + 0.24 \times 10 = 3.74 + 2.40 = \boxed{6.14}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 3.74 + 0.24 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 6.14$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	3.74
Coefficient β	0.24
Équation estimée	$\hat{Y} = 3.74 + 0.24 X$
Prévision pour $x = 10$	6.14

Exercice 18

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.46	7.82	2.19	8.57	1.23	6.79	4.57	7.01	2.89	5.34
y_i	4.12	6.79	3.46	7.23	2.57	5.89	4.68	6.12	3.79	5.01

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 18

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{4.99} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.97}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.72}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{2.08}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.44}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.72	3.44
Y	3.44	2.08

La variance de X (5.72) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (2.08) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.44) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.44}{5.72} = \boxed{0.60}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.97 - 0.60 \times 4.99 = \boxed{1.98}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.60$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.60 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

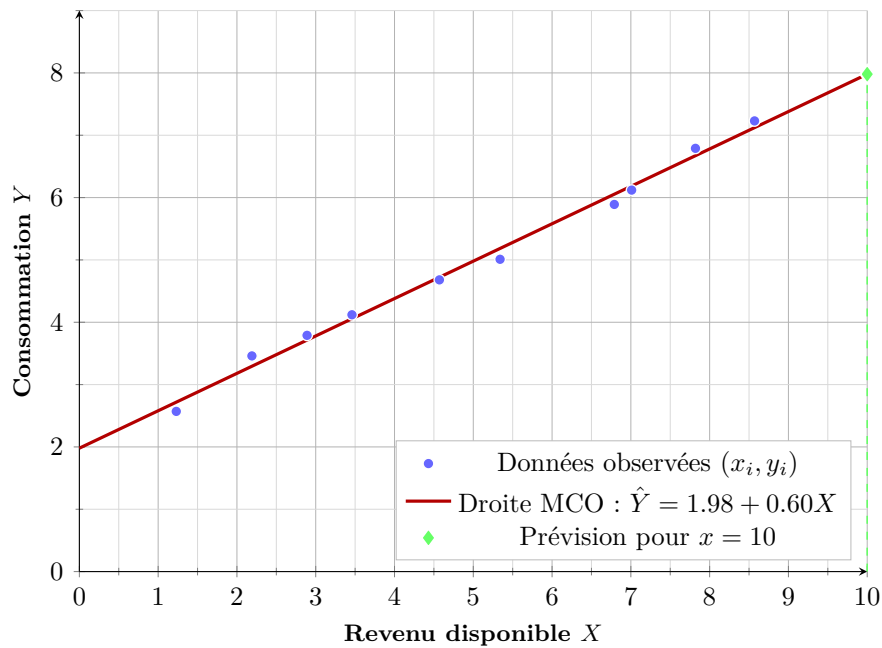
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.98 + 0.60 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.98 + 0.60 \times 10 = 1.98 + 6.00 = \boxed{7.98}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.98 + 0.60 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.98$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.98
Coefficient β	0.60
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.98 + 0.60 X$
Prévision pour $x = 10$	7.98

Exercice 19

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.35	7.89	4.12	6.57	1.79	8.23	3.46	5.68	7.01	4.89
y_i	3.91	6.66	4.48	5.95	3.04	6.58	3.97	5.44	5.54	5.34

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 19

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{5.20} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{5.09}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{4.58}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.30}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{2.38}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	4.58	2.38
Y	2.38	1.30

La variance de X (4.58) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.30) la dispersion de la consommation. La covariance positive (2.38) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{2.38}{4.58} = \boxed{0.52}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5.09 - 0.52 \times 5.20 = \boxed{2.39}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.52$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.52 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

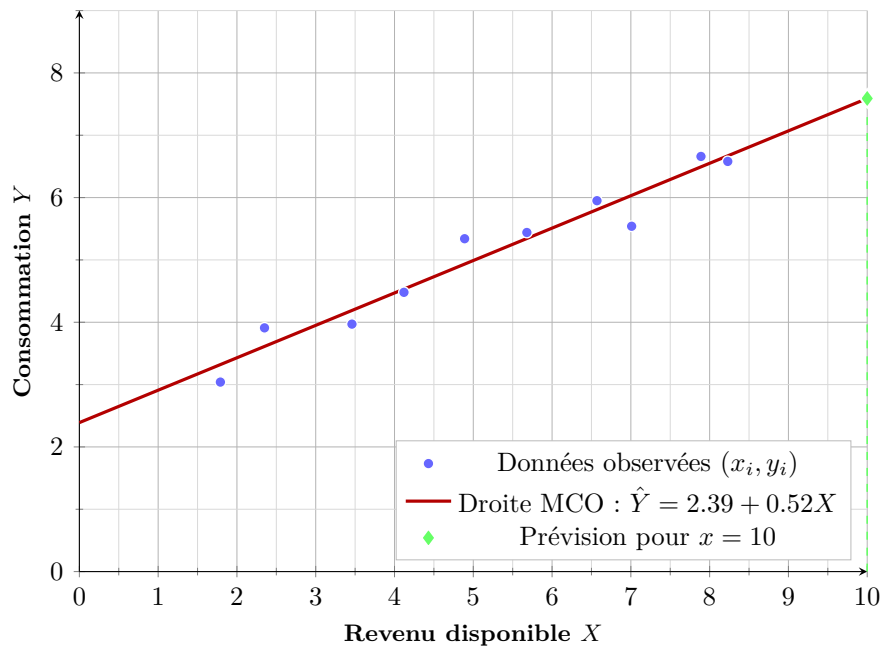
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 2.39 + 0.52 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 2.39 + 0.52 \times 10 = 2.39 + 5.20 = \boxed{7.59}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 2.39 + 0.52 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.59$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	2.39
Coefficient β	0.52
Équation estimée	$\hat{Y} = 2.39 + 0.52 X$
Prévision pour $x = 10$	7.59

Exercice 20

On étudie la relation entre le **revenu disponible des ménages** (noté X) et leur **consommation** (notée Y). Le modèle théorique s'écrit :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

- α est une constante (consommation autonome),
- β est le coefficient marginal (propension marginale à consommer), avec $0 < \beta < 1$,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, centré et réduit : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ et $V(\varepsilon_i) = 1$.

On dispose de l'échantillon suivant (valeurs en unités monétaires) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2.12	7.46	3.79	8.23	1.57	6.89	4.12	7.57	2.89	5.23
y_i	2.87	5.93	3.72	6.39	2.51	5.46	3.54	5.65	2.88	4.83

Questions :

1. Quelle est la variable explicative du modèle ?
2. Quelle est la variable expliquée du modèle ?
3. Quel est le terme d'erreur du modèle ?
4. Calculer les moyennes \bar{x} et \bar{y} des variables X et Y respectivement.
5. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables X et Y respectivement.
6. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ entre les variables X et Y .
7. Donner une estimation du coefficient β par les Moindres Carrés Ordinaires (MCO).
8. Donner une estimation par MCO de la constante α .
9. Quel est l'effet d'une augmentation unitaire du revenu X sur la consommation Y ?
10. Quel sera le niveau prédit de la consommation pour un revenu disponible égal à 10 ?

Solution 20

1. Il s'agit du **revenu disponible des ménages**, noté X . C'est la variable utilisée pour expliquer ou prédire la consommation.
2. Il s'agit de la **consommation des ménages**, notée Y . C'est la variable que le modèle cherche à expliquer à partir du revenu.
3. Le terme ε_i représente l'ensemble des facteurs non observés influençant la consommation autres que le revenu. Par hypothèse, il est **centré** ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$) et **réduit** ($\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$).

4. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \boxed{4.99} \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \boxed{4.38}$$

5. Variances :

$$V(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \boxed{5.35}$$

$$V(Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \boxed{1.86}$$

6. **Covariance :**

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \boxed{3.12}$$

Matrice des variances - covariances :

	X	Y
X	5.35	3.12
Y	3.12	1.86

La variance de X (5.35) mesure la dispersion du revenu, celle de Y (1.86) la dispersion de la consommation. La covariance positive (3.12) indique que revenu et consommation évoluent dans le même sens.

7. **Estimation MCO de β :**

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{3.12}{5.35} = \boxed{0.58}$$

Ce résultat est cohérent avec la contrainte $0 < \beta < 1$: la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à 1.

8. **Estimation MCO de α :**

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 4.38 - 0.58 \times 4.99 = \boxed{1.49}$$

9. **Interprétation économique de $\hat{\beta}$:**

Le coefficient $\hat{\beta} = 0.58$ mesure l'**effet marginal** du revenu sur la consommation. C'est à dire, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation d'une unité du revenu disponible entraîne en moyenne une augmentation de **0.58 unité** de la consommation.

10. **Prévision pour $X = 10$:**

La droite de régression estimée est :

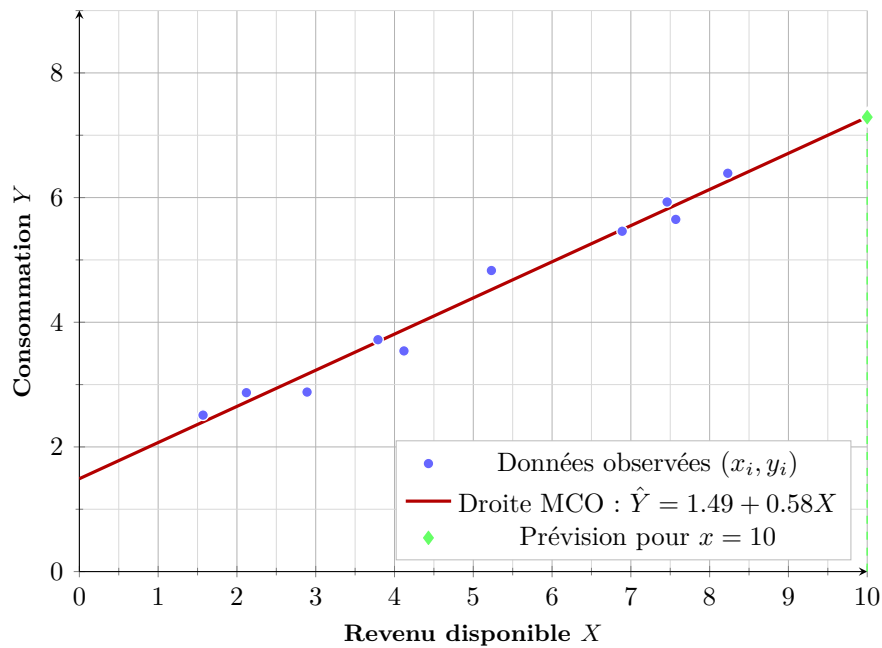
$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i = 1.49 + 0.58 x_i$$

Pour un revenu disponible $x = 10$, la consommation prédite vaut :

$$\hat{y}(10) = 1.49 + 0.58 \times 10 = 1.49 + 5.80 = \boxed{7.29}$$

Représentation graphique

La figure ci-dessous représente le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que la droite de régression estimée par les MCO : $\hat{Y} = 1.49 + 0.58 X$.

**Lecture du graphique :**

- Les points bleus représentent les 10 observations de l'échantillon.
- La droite rouge correspond à la relation linéaire estimée par les MCO.
- Le losange vert indique la consommation prédite ($\hat{y} = 7.29$) pour un revenu $x = 10$.
- La dispersion des points autour de la droite illustre l'effet du terme d'erreur ε_i .

Récapitulatif des résultats estimés :

Paramètre	Estimation MCO
Constante α	1.49
Coefficient β	0.58
Équation estimée	$\hat{Y} = 1.49 + 0.58 X$
Prévision pour $x = 10$	7.29